数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 27-29

非線形計画問題の近似最適解

横山一憲* (Kazunori YOKOYAMA)

Abstract

非線形計画問題の近似最適解の特徴付けをおこなう。一般に近似最適解は目的関数などに、さほど条件を仮定しなくともその存在性は保証される。その集合の大きさはどのくらいか。また近似解を得るために使用したパラメータを動かしたら集合がどのように変化するのかなどに注目して近似最適解集合の評価をおこなう。

次の非線形計画問題を考える。

$$\begin{array}{ll}\textbf{(P)} & \textbf{minimize } f(x) \\ & \textbf{subject to } g_i(x) \leq 0 \\ & \textbf{where } f, g_i : R^n \to R(k=1,\ldots,p, i=1,\ldots,m)\end{array}$$

本報告中では、次の仮定を満足するとする。

仮定 f : 凸で下に有界, g_i : 凸 for $i=1,...,m$, feasible set $K=\{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0$ for $i=1,...,m\}$ として $int\ \ K$は空でない。

問題 (P) に対する近似最適解の定義を与える。

定義$\bar{x} \in K$ が問題 (P) に対するε-近似最適解であるとは、$f(x)+\varepsilon \geq f(\bar{x})$ for any $x \in K$ なることである。このとき、この近似最適解の集合を $A(\varepsilon)$ とおく。

また、

$\bar{x} \in K$ が問題 (P) に対する $almost$ ε-近似最適解であるとは、$\bar{x} \in \{x \mid g_i(x) \leq \varepsilon$ for any $i=1,...,m\} = K(\varepsilon)$ かつ $f(x)+\varepsilon \geq f(\bar{x})$ for any $x \in K$ なることである。このとき、この近似最適解の集合を $alA(\varepsilon)$ とおく。

明らかに上記の仮定の下で $A(\varepsilon), alA(\varepsilon) \neq \emptyset$ である。また、微分不可能凸計画問題に対するアルゴリズムのひとつの流れとして劣勾配法 → ε-劣勾配法 [2] → バンドル法 [4] があるが、ここでも近似最適解は重要な役割をなしてきた。

注意 (P) を正確なペナルティ関数 θ_ρ を用いて制約なしの問題に変換し、ペナルティパラメーター ρ の大きさに注目することによって (P) に対する近似解を得るための十分条件については次のような結果が示されている。

命題 [6] 有限な値 $\rho_0 > 0$ が存在して $\rho \geq \rho_0$ ならば

$\bar{x} \in A(\theta_\rho, \varepsilon)$ のとき $\bar{x} \in alA(\varepsilon)$

where $A(f,\varepsilon) = \{\bar{x} \in R^n \mid f(x)+\varepsilon \geq f(\bar{x})$ for any $x \in R^n\}, \theta_\rho(x) = f(x) + \rho\sum_{i=1}^m max(0, g_i(x))$

*新潟経営大学経営情報学部, 〒959－13 新潟県加茂市希望ヶ丘2909－2, e-mail:kazu@duck.niigataum.ac.jp

$C, D \subset R^n$ and $C_\alpha = C \cap \alpha B$ 但し、$\alpha > 0, B \subset R^n$: 単位球 として、近似解を評価するための距離を定義する。

定義 $d(x,C) = inf\{\| x - y \| | y \in C\}, haus(C,D) = max(e(C,D), e(D,C))$
where $e(C,D) = sup_{x \in C} \ d(x,D)$

最近 [1] において Attouch and Wets が非制約問題に対し興味深い次のような結果を示した。

定理 [1] もし $A(f,\varepsilon)_{u_0}, A(\tilde{f},\varepsilon)_{u_0} \neq \emptyset$ for any $\varepsilon > 0$ なる u_0 が存在するならば for any $u > u_0$,

$$haus((A(f,\varepsilon))_u, (A(\tilde{f},\varepsilon))_u) \leq Mmax(e((epi \ \ f)_u, epi \ \ \tilde{f}), e(epi \ \ f, (epi \ \ \tilde{f})_u)$$

for some $M > 0$

これは非制約問題に対し目的関数を変化させた場合、最適解集合は大きく変化するが近似最適解集合はその目的関数のある距離によって Lipschitz continuity があることを示している。
本報告では制約付きの問題 (P) について同様なことを考えたい。

制約なしの問題を解くことによって得られた (P) に対する近似解集合 $alA(\varepsilon)$ と許容集合に含まれた近似解集合 $A(\varepsilon)$ の違いは $alA(\varepsilon)\backslash A(\varepsilon)$ なる点と $A(\varepsilon)$ との距離の上界を与えることによって評価された。

命題 [7] $x_s \in R^n$ と $\delta > 0$ が存在して$\delta\tilde{B} \subset F(x_s) + R_+^{m+1}$
但し $\tilde{B} \subset R^{m+1}$: 単位球、$F(x) = (g_1(x), ..., g_m(x), f(x) - inf\{f(y)|y \in K\} - \varepsilon)$,
また $\bar{x} \in alA(\varepsilon)\backslash A(\varepsilon)$ とする。このとき、

$$d(\bar{x}, A(\varepsilon)) \leq min(1, \| F(\bar{x}) \| /\delta) \| \bar{x} - x_s \|$$

が成立する。

パラメーターを変化させたときは次のように評価できる。

命題 $(A(\varepsilon))_{u_0} \neq \emptyset$ for any $\varepsilon > 0$ なる $u_0 > 0$ が存在するとする。このとき
for any $u \geq u_0$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$,

$$haus((A(\varepsilon_2))_u, (A(\varepsilon_1))_u) \leq (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(u + u_0)/\varepsilon_2.$$

が成立する。

参考文献

[1] H.Attouch and R.J.-B.Wets, Quantitative Stability of Variational Systems : 3, ε-Approximate Solutions, Mathematical Programming, Vol.61, pp.197-214, 1993

[2] D.P.Bertsekas and S.K.Mitter, A Descent Numerical Method for Optimization Problems with Non-differential Cost Functionals, SIAM J.Control, Vol.11, pp.637-652, 1973

[3] 伊藤輝生, 非線形計画問題の罰関数法による数値解の誤差範囲, 計測自動制御学会論文集 13-2, pp.142–147, 1977

[4] C.Lemaréchal, Nondifferentiable Optimizaiton, in G.L.Nemhauser et al. eds.,*Handbooks in OR and MS, Vol.1* (Elsevier), pp.529-572, 1989

[5] S.M.Robinson, An application of error bound for convex programming problems in linear space, SIAM J. Control, Vol.12, pp.271–273, 1975

[6] K.Yokoyama, ε-Optimality Criteria for Convex Programming Problems via Exact Penalty Functions, Mathematical Programming, Vol.56, pp.233–243, 1992

[7] K.Yokoyama, 非線形計画問題に対する Almost ε-approximate solution について, RIMS Kokyuroku, Vol.864, pp.27–30, 1994